

TD 34-35-36 : Probabilités

Probabilité sur un univers

Exercice 1. On lance un dé à six faces truqué : la probabilité d'obtenir $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ est proportionnelle à k . Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Indication : déterminer l'espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) associé à cette expérience.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \llbracket -n, n \rrbracket$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{n+1-|k|}{(n+1)^2}$.

- 1) Montrer que \mathbb{P} est une probabilité sur Ω .
- 2) Déterminer la probabilité de l'événement $A = \llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$.

Dénombrements et probabilités

Exercice 3. Un facteur entre dans un immeuble et doit distribuer n lettres, une exactement pour chacune des n boîtes aux lettres. Mais il est pressé et distribue les lettres au hasard : une dans chaque boîte.

- 1) Donner un univers Ω correspondant à cette expérience.
- 2) Quelle est la probabilité que la distribution soit correcte ?
- 3) Quelle est la probabilité que la boîte 1 soit correctement remplie ?
- 4) Quelle est la probabilité que la boîte 1 ne contienne pas de lettre pour d'autres voisins ?
- 5) Reprendre les questions précédentes, en supposant cette fois qu'une même boîte est susceptible de recevoir plusieurs lettres, tandis que d'autres peuvent n'en recevoir aucune.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une loterie, il y a n tickets dont g tickets gagnants ($1 \leq g \leq n$). Quelle est la probabilité de gagner en achetant a tickets ($1 \leq a \leq n$) ?

Exercice 5. Soit $b, n \in \mathbb{N}^*$. On tire simultanément deux boules dans une urne qui contient b boules blanches et n boules noires. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées aient la même couleur ?

Lois de variables aléatoires

Exercice 6. Un joueur lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la v.a. qui donne le numéro du lancer lors duquel le résultat est pile pour la première fois. Si pile n'a pas été obtenu au cours des n lancers, alors X prend la valeur 0. Déterminer la loi de X .

Exercice 7. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la v.a. égale au maximum des deux numéros obtenus. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire la loi de X .

Exercice 8. Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p . En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p . Déterminer la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves.

Conditionnement

Exercice 9. Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour (jour 1), il ne fume pas. On suppose ensuite que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

- La probabilité qu'il fume le jour $j + 1$ sachant qu'il n'a pas fumé le jour j est égale à $\alpha \in]0, 1[$.
- La probabilité qu'il ne fume pas le jour $j + 1$ sachant qu'il a fumé le jour j est égale à $\beta \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le fumeur n'a pas fumé le jour n », et on note p_n sa probabilité.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
- 2) En déduire une expression de p_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Étudier la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 10. Un candidat répond à un QCM où chaque question comporte n réponses possibles. Soit l'étudiant connaît la réponse et la coche, soit il choisit au hasard une réponse parmi les n proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est $p \in]0, 1[$.

Si l'étudiant a bien répondu à la question, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la réponse ?

Exercice 11. Un groupe de colle de 3 élèves passe une colle de maths. Ils doivent chacun répondre à une question de cours, parmi 6 proposées. Le premier élève tire au hasard une des 6 questions, puis le deuxième tire une des 5 restantes et le dernier une des 4 restantes. Vous êtes l'un des élèves et vous avez fait l'impasse sur une des questions. On vous propose de choisir votre place. Choisissez-vous la première ? la deuxième ? ou la troisième ?

Exercice 12. On dispose de deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second est pipé et donne 6 une fois sur trois (les autres faces étant équiprobables). On prend un dé au hasard et on le lance.

- 1) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
- 2) On obtient un 5. Même question.

Exercice 13. Une famille a deux enfants.

- 1) L'enfant aîné est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
- 2) L'un des enfants est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?
- 3) (★) L'un des enfants est un garçon né un lundi. Calculer la probabilité que le deuxième enfant soit un garçon et montrer qu'elle est comprise entre 48% et 49%.

Indépendance

Exercice 14. On lance un dé à six faces équilibré. On pose les événements

$$A = \text{"on obtient 2, 4 ou 6"} \quad \text{et} \quad B = \text{"on obtient 3 ou 6"}$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 15. Trouver un univers Ω et trois événements A, B, C tels que A, B sont indépendants ; A, C sont indépendants ; mais A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

Exercice 16. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[[1, n]]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 17. Soit X, Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad p_i := \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i)$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

Exercice 18. Soit X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$.

Couples de v.a.

Exercice 19. On considère deux v.a. indépendantes X et Y qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ dont la loi conjointe est

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\binom{n}{j}}{2^n(n+1)}$$

Déterminer et reconnaître les lois marginales de (X, Y) .

Exercice 21. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. On note X la v.a. indicatrice de l'événement « on tire une dame » et Y la v.a. indicatrice de l'événement « on tire un roi ».

Déterminer les lois conjointes et marginales du couple (X, Y) . Ces variables sont-elles indépendantes ?

Espérance, variance, covariance

Exercice 22. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire un jeton, et on note X la v.a. égale au numéro obtenu.

- 1) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- 2) Quelle est la probabilité de l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \leq \sigma(X)\}$?

Exercice 23 (*techniquement hors-programme MPSI*). On propose de jouer au jeu suivant : le joueur A donne x euros au joueur B , puis le joueur A tire à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

- Si A obtient zéro face, le joueur B lui donne deux euros.
- Si A obtient une faces, le joueur B lui donne quatre euros.
- Si A obtient deux faces, le joueur B lui donne huit euros.
- etc.

Pour quelle valeur de x est-ce que le jeu est équitable ?

Exercice 24. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère une v.a. X de loi

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = i) = \alpha i$$

- 1) Déterminer α pour que la loi de X ait un sens.
- 2) Déterminer l'espérance de $\frac{1}{X}$, de $\frac{2^X}{X}$, puis de X .

Exercice 25. On considère un péage autoroutier avec 3 barrières. Un total de n voitures franchissent ce péage en passant (indépendamment les unes des autres) par une des 3 barrières. On note X_1, X_2, X_3 les v.a. qui correspondent au nombre de voitures ayant franchi chacune des 3 barrières, respectivement.

- 1) Déterminer la loi de X_1 .
- 2) Calculer les variances de X_1 , de X_2 et de $X_1 + X_2$.
- 3) En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

Exercice 26. On considère U, V deux v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $X = U + V$ et $Y = U - V$.

- 1) Calculer la covariance de X et Y .
- 2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ un $(n+1)$ -uplet de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la v.a. $Y_i = X_i X_{i+1}$.

- 1) Déterminer la loi de Y_i .
- 2) On suppose $n \geq 3$. Les v.a. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? Les v.a. Y_1 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
- 3) Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 28 (CCP). Soit $\varepsilon > 0$ et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . Soit $F = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- 1) Démontrer que

$$\mathbb{P}(|F - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

- 2) On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?